

1. Mouvement ascensionnel de Rocketeer

1.1. Pour la phase 1 : par définition $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, soit ici $\vec{a}_G \approx \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} \approx \frac{\vec{v}_1}{\Delta t}$.

Ainsi le vecteur accélération a même sens et même direction que le vecteur vitesse \vec{v}_1 .

Le mouvement est vertical, la direction de \vec{a}_G est verticale.

Le mouvement est ascensionnel, \vec{a}_G est orienté vers le haut.

Pour la phase 2 :

$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ avec $\vec{v} = \text{Cte}$ ainsi $\vec{a}_G = \vec{0}$.

1.2.1. L'autre force qui s'exerce sur le système M est son poids \vec{P} .

1.2.2. Pour que le système décolle, il faut que la valeur de la force de poussée \vec{F} (orientée vers le haut) soit supérieure à celle du poids \vec{P} (orientée vers le bas).

$$F > P$$

$$F > m_R \cdot g$$

$$F > 120 \times 10$$

$F > 1200 \text{ N}$ résultat conforme à la proposition C qui, seule, indique une valeur supérieure à 1200 N.

Remarque : il est possible de faire une réponse plus rigoureuse en appliquant la 2^{ème} loi de Newton au système M et en utilisant la condition $a_y > 0$ ce qui implique $P_y + F_y > 0$

$$\text{soit } -P + F > 0 \text{ donc } F > P$$

< 0 orienté vers le bas

> 0 orienté vers le haut

1.2.3. D'après l'énoncé, la valeur de la force de poussée est « égale au produit du débit massique de gaz éjecté par la vitesse d'éjection de ces gaz » donc $F = D_f \cdot v_f = \frac{m_f}{\Delta t_f} \cdot v_f$.

$$\text{Ainsi, } m_f = \frac{F \cdot \Delta t_f}{v_f}$$

$$m_f = \frac{1600 \times 3,0}{2 \times 10^3} = 2,4 \text{ kg} \quad \text{comme indiqué (1 seul CS en toute rigueur).}$$

1.2.4. En appliquant la seconde loi de Newton au système M, dans un référentiel terrestre considéré galiléen :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_R \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm_R}{dt} \cdot \vec{v} + m_R \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme la masse du système est considérée constante malgré l'éjection des gaz, alors

$$\frac{dm_R}{dt} = 0, \text{ on obtient } \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}_G.$$

$$\vec{P} + \vec{F} = m_R \cdot \vec{a}_G$$

En projetant sur un axe Oy vertical : $P_y + F_y = m_R \cdot a_{Gy}$

En orientant l'axe vers le haut : $-P + F = m_R \cdot a_{Gy}$

$$a_{Gy} = \frac{-P + F}{m_R} = \frac{-m_R \cdot g + F}{m_R} = -g + \frac{F}{m_R}$$

$$a_{Gy} = -10 + \frac{1600}{120} = 3,3 \text{ m.s}^{-2}$$

valeur non arrondie stockée en mémoire

Estimons la valeur v_1 de la vitesse à l'issue de la phase 1, soit à la date $t_1 = 3,0$ s :

Par définition $a_{Gy} = \frac{dv_y}{dt}$ donc en primitivant, on obtient $v_y = a_{Gy} \cdot t + C$.

D'après les conditions initiales, à $t = 0$ s, on a $v_y = 0$ donc $C = 0$.

Ainsi $\mathbf{v}_y = \mathbf{a}_{Gy} \cdot t$

$$v_y(t = 3,0 \text{ s}) = 3,3 \times 3,0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_1 = \sqrt{v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{10 \text{ m.s}^{-1}}$$

2. Problème technique

2.1. D'après l'énoncé, la vitesse du système à la date $t = 0$ est nulle : on peut donc éliminer les courbes C et D.

De plus, le système tombe verticalement donc le vecteur vitesse est orienté vers le bas et avec l'orientation de l'axe Oy choisie $V_y < 0$.

Seule la courbe A est cohérente avec la situation présentée.

2.2. Considérons le système M dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) en chute libre. Il n'est soumis qu'à son poids.

Appliquons la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

soit $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$

donc $\vec{g} = \vec{a}$

Par projection sur l'axe Oy vertical orienté vers le haut, il vient $\mathbf{a}_y = -\mathbf{g}$

Par définition, $\mathbf{a}_y = \frac{dv_y}{dt}$.

En primitivant, on obtient $v_y = -g \cdot t + v_{0y}$.

Le système tombe sans vitesse initiale, soit $v_{0y} = 0 \text{ m.s}^{-1}$ donc : $\mathbf{v}_y = -\mathbf{g} \cdot t$

D'autre part $v_y = \frac{dy}{dt}$.

En primitivant, on a : $y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C$.

Or à $t = 0$ s, le système est à la hauteur $y_0 = 80$ m, donc $C = y_0$ d'où : $\mathbf{y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0}$

Numériquement : $y = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 80$

Soit, comme indiqué, $\mathbf{y = -5 \cdot t^2 + 80}$

2.3. Il faut que Batman arrive sur le lieu de décollage avant que Rocketeer ne touche le sol.

D'après l'équation précédente, la durée de chute t_c est telle que $y(t_c) = -5 \cdot t_c^2 + 80 = 0$.

Donc $t_c = \sqrt{\frac{-80}{-5}} = 4,0$ s.

Il faut déterminer la distance que Batman doit parcourir en utilisant le schéma.

L'échelle donne $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ km}$
 $9,4 \text{ cm} \rightarrow d$

$d = 9,4$ km à parcourir en $t_c = 4,0$ s, à la vitesse moyenne v .

$$v = \frac{d}{t_c}$$

$$v = \frac{9,4 \times 10^3}{4,0} = 2,4 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1} = 2,4 \text{ km.s}^{-1}$$

Pour que Rocketeer soit sauvé, il faut que la Batmobile roule à une vitesse impressionnante, proche de 7 fois la vitesse du son (Mach 7). Il semble impossible que Batman ait le temps d'intervenir. Les aventures de Rocketeer risquent de s'arrêter lors de cet épisode.